①求逆的方法.

以上定理的证明过程中:

已有 $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{b\text{ 取以上列向量}}$

可同时作 (A, b) rref 来求解.

$$\mathrm{rref}(A, I) \Rightarrow (I, A^{-1})$$

例子: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

或者另一个观点，$[A, I]$ 作行变换相当于左乘 $B_m \cdots B_3 B_2 B_1 = B$. A $n\times n$, B $n\times n$.

$B\cdot[A, I]$ 可验证是等于 $[BA, BI]$

则行变换将 A 变成 $rref = I_n$ 时，

$BA = I_n$. $\Rightarrow$ $B = A^{-1}$.

$B\cdot[A_1, A_2]$. $A_1, A_2, B \in M_{n\times n}$.

$$B\cdot[v_1, v_2, \cdots v_n, w_1 \cdots w_n] = [Bv_1, Bv_2, \cdots Bv_n, Bw_1 \cdots Bw_n]$$

$$= [BA_1, BA_2]$$

矩阵乘法常以分块形式出现

这一观点也推出如下常用结论：

对 $A_{m\times n}$ 作行变换时，同时对 I_m 作，可记录下左乘的 B

例如: $A=\begin{bmatrix}1&a&b&c\\ &1&d&e\\ & &1&f\\ & & &1\end{bmatrix}$

若, $BA=\begin{bmatrix}1&a&b&0\\ &1&d&0\\ & &1&0\\ & & &1\end{bmatrix}$ 则 $B=\begin{bmatrix}1&-c&ce&-cfe\\ &1&-e&fe\\ & &1&-f\\ & & &1\end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&a&b&c&1&&&\\ &1&d&e&&1&&\\ &&1&f&&&1&\\ &&&1&&&&1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&a&b&c&1&&&\\ &1&d&e&&1&&\\ &&1&0&&&1&-f\\ &&&1&&&&1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&a&b&0&1&-c&ce&-cfe\\ &1&d&0&&1&-e&fe\\ &&1&0&&&1&-f\\ &&&1&&&&1\end{array}\right]$$

② 推论: $A\in M_{n\times n}$ 可逆, 当且仅当 A 是 n 阶初等矩阵的乘积.

证明: $(B_m\cdots\cdots B_1)A=I$.

B_i 初等矩阵. $\quad A=(B_m\cdots B_1)^{-1}$

B_i^{-1} 也是. $\quad =B_1^{-1}B_2^{-1}\cdots B_m^{-1}$

(对可逆矩阵证明某些结论, 可约化到初等矩阵)

分块矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

可写作分块矩阵

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)$$

A_{11} A_{12} A_{21} A_{22}

四块

$$\begin{matrix} 2\times 2 & 2\times 1 \\ 1\times 2 & 1\times 1 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1\times 2 & 1\times 1 \\ \hline 2\times 2 & 2\times 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c|c} 1\times 2 & 1\times 1 \\ \hline 1\times 2 & 1\times 1 \\ \hline 1\times 2 & 1\times 1 \end{array}\right) \text{ 六块}$$

加法： $A = (A_{ij})_{r\times s}$ $B = (B_{ij})_{r\times s}$

A、B 中 A_{ij} 与 B_{ij} 同型.

则 $A+B=\left(A_{ij}+B_{ij}\right)$

数乘：$cA=\left(cA_{ij}\right)_{r\times s}$

乘法：$A=\left(A_{ij}\right)_{r\times s}\in M_{m\times n}$

$B=\left(B_{ij}\right)_{s\times t}\in M_{n\times l}$.

且 <u>A 的列划分与 B 的行划分相同</u>

则 $AB=\left(C_{ij}\right)_{r\times t}$

$C_{ij}=\sum_{k=1}^{s}A_{ik}B_{kj}$ 保证乘法可进行.

证明：可约化到 $l=1$ 或 $m=1$ 的情形.

可便于计算：例如准对角阵

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n\end{pmatrix}$$

A_i 是方阵.

$$B=\begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_n \end{pmatrix} \qquad B_i \text{ 阶} = A_i \text{ 阶}$$

$$AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_nB_n \end{pmatrix}$$

求逆 $A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_n^{-1} \end{bmatrix}$

矩阵的转置： $A\in M_{m\times n}$. $\quad A^T \in M_{n\times m}$

$A=(a_{ij}) \qquad A^T = (b_{ij})$. 则 $b_{ij}=a_{ji}$

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad x^T=(x_1 \cdots x_n)$$

$$A=(v_1\ v_2 \cdots v_m) \qquad A^T=\begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{pmatrix}$$

$(A^T)^T = A$. $\qquad (AB)^T=(B^TA^T)$

例： $AA^T=0 \iff A=0$.

列变换有类似的理论. 或者看成是

A^T 的行变换. 重要定理:

定理: # of pivots in rref(A) = # of pivots in rref(A^T)

列变换不改变 rref(A) 的 pivot 个数.

定理: 对 $A \in M_{m\times n}$ 作列变换等价于右乘可逆矩阵 $B \in M_{n\times n}$.

证明: 基础列变换也对应于右乘初等矩阵.
(初等)

例如

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} & & i列 & & j列 & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & a & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

第 j 行 × a 加到 i 行.

第 i 列 × a 加到 j 列.

求逆. $A \in M_{n\times n}$ $\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}$ 作列变换 $\rightarrow$ $\begin{bmatrix} I \\ A^{-1} \end{bmatrix}$

$A \in M_{m\times n}$. 对 I_n 同时作列变换, 得到右乘的 B.

分块行变换，列变换．（分块化零）（张贤科，许甫华 例 4.9）

$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$，　$A \in M_{r\times r}$　$D \in M_{(n-r)\times(n-r)}$

将 M 化为准三角形（$B=0$ 或 $C=0$）

(a)．A可逆，

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

(b)．(c)．(d) 类似，

证明：　对 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 作列变换，第一分列右乘 $-A^{-1}B$ 加到第二分列

有 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$

（注意不是 $-BA^{-1}$ 列变换先右乘 A^{-1} 然后右乘 $-B$，所以是 $-A^{-1}B$）

尝试消去 B 用行变换（D可逆），消去 C 用行或列变换

不同的变换过程得到相同的结果，有一些非平凡的等式。 $\alpha, \beta \in M_{n\times 1}$

例如：$\begin{bmatrix} I & \alpha \\ \beta^T & 1 \end{bmatrix}^{-1}$， $\left(\begin{array}{cc|cc} I & \alpha & I & 0 \\ \beta^T & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} I & \alpha & I & 0 \\ 0 & 1-\beta^T\alpha & -\beta^T & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} I & \alpha & I & 0 \\ 0 & 1 & -(1-\beta^T\alpha)^{-1}\beta^T & (1-\beta^T\alpha)^{-1} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} I & 0 & I+\alpha((1-\beta^T\alpha)^{-1}\beta^T), & -(1-\beta^T\alpha)^{-1}\alpha \\ 0 & 1 & -(1-\beta^T\alpha)^{-1}\beta^T & (1-\beta^T\alpha)^{-1} \end{array}\right)$$

另一方面 $\left(\begin{array}{cc|cc} I & \alpha & I & \\ \beta^T & 1 & & 1 \end{array}\right) \to$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} I-\alpha\beta^T & 0 & I & -\alpha \\ \beta^T & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\begin{pmatrix} I, & 0, & (I-\alpha\beta^T)^{-1}, & -(I-\alpha\beta^T)^{-1}\alpha \\ \beta^T & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} I & 0 & (I-\alpha\beta^T)^{-1}, & -(I-\alpha\beta^T)^{-1}\alpha \\ 0 & 1, & -\beta^T(I-\alpha\beta^T)^{-1}, & 1-\beta^T(I-\alpha\beta^T)^{-1}\alpha \end{pmatrix}$$

$$(I-\alpha\beta^T)^{-1} = I + \underbrace{(1-\beta^T\alpha)}_{\text{求 scalar 的逆即可}}{}^{-1}\alpha\beta^T$$

$$1-\beta^T(I-\alpha\beta^T)^{-1}\alpha = (1-\beta^T\alpha)^{-1}$$

(另一个证明: $(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots$
思考: 当 $\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha\beta^T)^n$ 不收敛时如何处理.
或者对一般的域, 例如 $K=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p prime.
如何处理)

常用想法: 可添加参数 λ, 在 $\underset{\uparrow\ \text{有理函数}}{K(\lambda)}$ 中, $\underset{\uparrow\ \text{形式幂级数环}}{K[[\lambda]]}$, 或者 $\underset{\uparrow\ \text{Laurant 级数环}}{K((\lambda))}$
中考虑

# of pivots in rref(A) = 行秩.
# of pivots in rref(A^T) = 列秩

定理: 列变换不改变行秩.

证明: A $m\times n$, B $n\times n$ 可逆.

# of pivots in rref(A) = k
# of pivots in rref(AB) = l
假设 $l > k$.

(想法 free unknows = 0, 只有零解.
另一方面 方程个数 < 未知数个数, 则齐次方程有非零解)

考虑方程 $Ax=0$, 则有主元 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}$.
自由元 $x_{j_1}, \cdots\ x_{j_{n-k}}$

$$Ax=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_{i_1} = \text{linear combination of } x_{j_1}, \cdots x_{j_{n-k}} \\ x_{i_2} = \\ \vdots \\ x_{i_k} = \end{cases} \quad (*_1)$$

考虑方程 $(AB)y=0$. 则与 $Ax=0$ 的解有一一对应

$x=By$. $\boxed{y=B^{-1}x \quad (*_2)}$

$(AB)y=0$ 有自由元 $y_{a_1}, \cdots y_{a_{n-l}}$

将 $(*_1)$ 代入 $(*_2)$，则 $(*_3)\begin{cases} y_{a_1} = \text{linear combination of } x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}} \\ \vdots \\ y_{a_{n-l}} \end{cases}$

取 $(*_3)$ 左边 $=0$，有关于 $x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}$ 的非零解。

将此解代入 $(*_1)$，得到 $Ax=0$ 的非零解 $x \neq 0$

另一方面此解代入 $y=B^{-1}x$，则为

$(A\ B)y=0$ 的解，且此时 y 满足 $y_{a_1}=0$，

$\dots$ $y_{a_{n-l}}=0$，因此 $y=0$（因为 $y_{a_1}, \dots, y_{a_{n-l}}$ 是自由元）

这与 $x=By$ 矛盾。

因此 $l \le k$，同理 $k \le l$。$\Rightarrow k=l$。

推论：

主定理：行秩 = 列秩。（定义秩 = 行秩 = 列秩）

证明：只需对 rref 证明

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & \cdots \\ & & & & & & & \ddots & 1 \end{bmatrix}$$ 作列变换到如下形式

$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$，则 A 与 A^T 均为 rref.

$\Rightarrow$ # of pivots in A = # of pivots in A^T.

定义：rank(A) (rk(A)) = 行秩或列秩

重要的东西讲两遍，

定理 (Rouché-Capelli) $Ax=b$ 有解当且仅当 $\text{rk}(A)=\text{rk}(A,b)$

定义：相抵标准型，$A \in M_{m\times n}$，存在 $P\in M_{m\times m}$，$Q\in M_{n\times n}$

P, Q 可逆，使得 $PAQ = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$

称 $\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$ 为相抵标准型. (canonical form)

定义：若存在 P, Q，使得 $PAQ = B$，则称 A 与 B 相抵. (equivalent)

$P \in M_{m\times m}$, $Q \in M_{n\times n}$.

定理：$A, B \in M_{m\times n}$ 相抵，当且仅当 $\text{rk}(A)=\text{rk}(B)$